第27卷 第6期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 6
2010年12月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Dec. 2010

**文章编号**:1005-3085(2010)06-1051-13

# 具 Monod-Haldane 功能反应的四种群食饵–捕食脉冲系统的动力学分析*

黄文韬[1]， 吴兴杰[2]， 李 伟[2]

(1- 桂林电子科技大学数学与计算科学学院，桂林 541004； 2- 合肥师范学院数学系，合肥 230061)

**摘 要**: 基于害虫综合管理策略，本文利用脉冲比较定理、Floquent 理论及微小扰动法，研究了一类具有 Monod-Haldane 功能反应、脉冲比例收获和脉冲常数投放的四种群食饵–捕食系统的动力学性质，证明了系统两食饵灭绝和持续生存的充分条件，而且给出了一食饵种群灭绝其余三种群持续生存的两个充分条件。数值模拟表明，随着投放量的增加，系统出现拟周期分支、倍周期分支、混沌、半周期分支等复杂的动力学性质。

**关键词**: 食饵捕食者；脉冲比较定理；分支；混沌；Floquent 理论

**分类号**: **AMS**(2000) 34A37; 92B05　　**中图分类号**: O175.15　　**文献标识码**: A

## 1 系统的提出

人类与有害的生命体的斗争进行了几千年，有害昆虫和某些有害带菌者对重要的植物、动物和人类造成危害，如何使这种危害减少到最低一直是昆虫学家与社会关心的问题。近几年，脉冲微分方程[1] 被引入到种群动力学中，并且得到了广泛的应用[2-7]。对生物种群的控制主要有三种最常见的方法且各有其效，即化学防治、生物防治[8] 和综合防治[9-12]，其中综合防治策略是使经济损失减到最小的一种非常有效的方法。

食饵–捕食系统是一种非常重要的生物系统，已有许多学者对此做了大量的工作[13-15]，近几年的工作主要集中在对具有功能反应的食饵-捕食系统的研究上。对具有 Monod-Haldne 功能反应[16] 和脉冲效应食饵–捕食生物模型的研究亦有许多结果[17,18]，但是采取综合防治策略，且脉冲投放发生在不同固定时刻的结果很少。文献 [19] 研究了四种群食物链方程的全局渐近稳定性，向中义、宋新宇等学者对一类具有脉冲效应且脉冲发生在一个固定时刻的四种群线性食饵-捕食系统作了分析[20]，随后又以相似的方法讨论了脉冲发生在两个固定时刻同一个线性模型[21]。仅依靠天敌，有时不足以消灭所有害虫，喷洒杀虫剂的过程中往往也会伤害天敌。如果根据食饵与捕食者种群的不同特性，采取在不同的固定脉冲时刻，分别对所有种群进行收获 (消灭) 和引进天敌的办法，就既能起到对天敌的保护，又能有效的杀灭害虫，这样更能有效地实现对系统的控制，而且比脉冲发生在一个固时刻模型更能准确地描述实际问题。当然，我们的主要目的在于控制害虫生长而又保护天敌的生存，实现生态系统的平衡。

本文研究下面一类复杂的具有 Monod-Haldne 功能反应、脉冲比例收获 (消灭) 和脉冲常数

**收稿日期**: 2008-11-24. **作者简介**: 黄文韬 (1966年9月生)，男，博士，教授. 研究方向：微分方程定性理论.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10961011)；安徽省高等学校省级自然科学研究项目 (KJ2010B164).

投放发生在不同固定时刻的四种群食饵–捕食者系统，并讨论其全面的动力学性质。

$$
\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\dot{x}_1(t)=x_1(t)(d_1-x_1(t)-\alpha x_2(t)) \\
\qquad -\dfrac{a_1x_1(t)y_1(t)}{1+\theta_1x_1(t)+c_1x_1^2(t)}-\dfrac{a_2x_1(t)y_2(t)}{1+\theta_2x_1(t)+c_2x_1^2(t)}, \\
\dot{x}_2(t)=x_2(t)(d_2-\beta x_1(t)-x_2(t)) \\
\qquad -\dfrac{b_1x_2(t)y_1(t)}{1+\rho_1x_2(t)+\mu_1x_2^2(t)}-\dfrac{b_2x_2(t)y_2(t)}{1+\rho_2x_2(t)+\mu_2x_2^2(t)}, \\
\dot{y}_1(t)=y_1(t)\Big(-d_3+\dfrac{\gamma a_1x_1(t)}{1+\theta_1x_1(t)+c_1x_1^2(t)}+\dfrac{\gamma b_1x_2(t)}{1+\rho_1x_2(t)+\mu_1x_2^2(t)}\Big), \\
\dot{y}_2(t)=y_2(t)\Big(-d_4+\dfrac{\eta a_2x_1(t)}{1+\theta_2x_1(t)+c_2x_1^2(t)}+\dfrac{\eta b_2x_2(t)}{1+\rho_2x_2(t)+\mu_2x_2^2(t)}\Big),
\end{array}\right\} t\neq(n+l-1)T,\ t\neq nT, \\
\left.\begin{array}{l}
\triangle x_1(t)=-q_1x_1(t), \\
\triangle x_2(t)=-q_2x_2(t), \\
\triangle y_1(t)=-q_3y_1(t), \\
\triangle y_2(t)=-q_4y_2(t),
\end{array}\right\} t=(n+l-1)T, \\
\left.\begin{array}{l}
\triangle x_1(t)=0, \\
\triangle x_2(t)=0, \\
\triangle y_1(t)=p_1, \\
\triangle y_2(t)=p_2,
\end{array}\right\} t=nT,
\end{array}\right. \tag{1}
$$

其中 $x_i(t)$ ($i=1,2$，以下表示相同) 表示两食饵种群在 $t$ 时刻的密度，$y_i(t)$ 表示两捕食者种群在 $t$ 时刻的密度，

$$p(x_1)=a_1x_1/(1+\theta_1x_1+c_1x_1^2)$$

称为 Monod-Haldane 功能反应函数，$T$ 为脉冲周期，$d_i>0$ 为两食饵种群 $x_i(t)$ 的内禀增长率，$d_{i+2}$ 为捕食者 $y_i(t)$ 的死亡率，$\alpha,\beta$ 分别表示两食饵 $x_i(t)$ 种群相互作用对其相应增长率的影响，$a_i>0,\ b_i>0$ 是食饵种群因捕获而减少的比例，$0\le q_j<1$ ($j=1,2,3,4$) 为 $(n+l-1)T$ 时刻对四种群的捕获或消灭比例，$p_i>0$ 为脉冲大小或迁入量，表示由于人工繁殖或释放捕食者在 $nT$ 时的密度增加量，$n\in Z_+$，$Z_+=\{1,2,\cdots\}$，$0<l<1$，$l$ 为常数，可以实现对系统投放天敌的时刻的控制。$\Delta x_i=x_i(t^+)-x_i(t)$，$\Delta y_i=y_i(t^+)-y_i(t)$，$t\ge0$，$nT$ 和 $(n+l-1)T$ 分别表示对系统采用化学防治 (喷洒杀虫剂) 与生物防治 (投放天敌) 的时间。

## 2 预备知识与主要结果

考虑系统 (1) 的子系统

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\dot{y}_i(t)=-d_{i+2}y_i(t), & t\neq(n+l-1)T,\quad t\neq nT, \\
\triangle y_i(t)=-q_{i+2}y_i(t), & t=(n+l-1)T, \\
\triangle y_i(t)=p_i, & t=nT.
\end{array}\right. \tag{2}
$$

系统 (2) 是一个周期受迫的线性系统，易得

$$
y_i^*(t)=\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{p_i\cdot \mathrm{e}^{-d_{i+2}(t-(n-1)T)}}{1-(1-q_{i+2})\cdot\mathrm{e}^{-d_{i+2}T}}, & (n-1)T<t\le(n+l-1)T, \\
\dfrac{p_i(1-q_{i+2})\cdot\mathrm{e}^{-d_{i+2}(t-(n-1)T)}}{1-(1-q_{i+2})\cdot\mathrm{e}^{-d_{i+2}T}}, & (n+l-1)T<t\le nT,
\end{array}\right.
$$

是系统 (2) 的周期解

$$y_i^*(0^+) = y_i^*(nT^+) = \frac{p_i}{1-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-d_{i+2}T}},$$

$$y_i^*\big((n+l-1)^+\big) = y_i^*(lT^+) = \frac{p_i(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-d_{i+2}lT}}{1-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-d_{i+2}T}},$$

系统 (2) 以 $y_i(0+) \geq 0$ 为初值的解为

$$y_i(t) = \begin{cases} (1-q_{i+2})^{n-1}\Big(y_i(0^+) - \dfrac{p_i}{1-(1-q_{i+2})\mathrm{e}^{-d_{i+2}T}}\Big)\mathrm{e}^{-d_{i+2}t} + y_i^*(t), \\ \qquad\qquad (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ (1-q_{i+2})^{n}\Big(y_i(0^+) - \dfrac{p_i}{1-(1-q_{i+2})\mathrm{e}^{-d_{i+2}T}}\Big)\mathrm{e}^{-d_{i+2}t} + y_i^*(t), \\ \qquad\qquad (n+l-1)T < t \leq nT. \end{cases}$$

**定理 2.1**　设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ 是系统 (1) 的解，若

$$p_2 > \frac{d_4(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}{a_2(1+\theta_2 d_1 + c_2 d_1^2)(1-q_4\mathrm{e}^{-d_4lT} - (1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}$$
$$\Big(d_1T - \frac{a_1p_1(1+\theta_1 d_1 + c_1 d_1^2)(1-q_3\mathrm{e}^{-d_3lT} - (1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}{d_3(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})} - \ln\frac{1}{1-q_1}\Big) \triangleq p_{2\max1},$$

且

$$p_2 > \frac{d_4(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}{b_2(1+\rho_2 d_2 + \mu_2 d_2^2)(1-q_4\mathrm{e}^{-d_4lT} - (1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}$$
$$\Big(d_2T - \frac{b_1p_1(1+\rho_1 d_2 + \mu_1 d_2^2)(1-q_3\mathrm{e}^{-d_3lT} - (1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}{d_3(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})} - \ln\frac{1}{1-q_2}\Big) \triangleq p_{2\max2},$$

即

$$p_2 > \max\{p_{2\max1}, p_{2\max2}\} = p_{2\max},$$

则食饵灭绝周期解 $(0, 0, y_1^*(t), y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的。

证明　首先利用系统 (1) 的变分方程来证明 $(0,0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 的局部渐近稳定性，作变换 $x_i(t) = u_i(t)$，$y_i(t) = v_i(t) + y_i^*(t)$，于是相应线性方程组的解为

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T),$$

其中 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} d_1 - a_1y_1^*(t) - a_2y_2^*(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - b_1y_1^*(t) - b_2y_2^*(t) & 0 & 0 \\ \gamma a_1 y_1^*(t) & \gamma b_1 y_1^*(t) & -d_3 & 0 \\ \eta a_2 y_2^*(t) & \eta b_2 y_2^*(t) & 0 & -d_4 \end{pmatrix} \Phi(t), \qquad (3)$$

且 $\Phi(0)=I$，由 Floquent 理论可知，如果矩阵

$$\Theta=\begin{pmatrix}1-q_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-q_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-q_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-q_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\mathbf{\Phi(t)}$$

的所有特征根的模都小于1，则周期解 $(0,0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的。$\Theta$ 的四个 Floquet 乘子为

$$u_1=(1-q_1)\cdot \mathrm{e}^{\int_0^T(d_1-a_1y_1^*(t)-a_2y_2^*(t))\mathrm{d}t},\quad u_2=(1-q_2)\cdot \mathrm{e}^{\int_0^T(d_2-b_1y_1^*(t)-b_2y_2^*(t))\mathrm{d}t},$$

$$u_3=(1-q_3)\cdot \mathrm{e}^{-d_3T}<1,\quad u_4=(1-q_4)\cdot \mathrm{e}^{-d_4T}<1,$$

把 $y_i^*(t)$ 代入积分可知，若满足

$$p_2>\frac{d_4(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}{a_2(1-q_4\mathrm{e}^{-d_4lT}-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}\left(d_1T-\frac{a_1p_1(1-q_3\mathrm{e}^{-d_3lT}-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}{d_3(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}-\ln\frac{1}{1-q_1}\right),$$

且

$$p_2>\frac{d_4(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}{b_2(1-q_4\mathrm{e}^{-d_4lT}-(1-q_4)\mathrm{e}^{-d_4T})}\left(d_2T-\frac{b_1p_1(1-q_3\mathrm{e}^{-d_3lT}-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}{d_3(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-d_3T})}-\ln\frac{1}{1-q_2}\right),$$

则 $|u_i|<1$。

仿照文献[22]中定理1的证明过程，可以证明当 $p_2>p_{2\max}$ 时，$y_1(t)\to y_1^*(t)$，$y_2\to y_2^*(t)(t\to\infty)$。 **证毕**

**定理2.2** 若

$$\alpha<\frac{d_1}{d_2},\quad \beta<\frac{d_2}{d_1},\quad A_i>0,\quad B_i>0,$$

$$p_2<\frac{A_2(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-A_2T})}{a_2(1-q_4\mathrm{e}^{-A_2lT}-(1-q_4)\mathrm{e}^{-A_2T})}\left(d_1T-\frac{a_1p_1(1-q_3\mathrm{e}^{-A_1lT}-(1-q_3)\mathrm{e}^{-A_1T})}{A_1(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-A_1T})}-\ln\frac{1}{1-q_1}\right)\triangleq p_{2\min1},$$

且

$$p_2<\frac{B_2(1-(1-q_4)\mathrm{e}^{-B_2T})}{b_2(1-q_4\mathrm{e}^{-B_2lT}-(1-q_4)\mathrm{e}^{-B_2T})}\left(d_2T-\frac{b_1p_1(1-q_3\mathrm{e}^{-B_1lT}-(1-q_3)\mathrm{e}^{-B_1T})}{B_1(1-(1-q_3)\mathrm{e}^{-B_1T})}-\ln\frac{1}{1-q_2}\right)\triangleq p_{2\min2},$$

即 $p_2 < \min\{p_{2\min1},\ p_{2\min2}\} = p_{2\min}$，则系统 (1) 是持续生存的，其中

$$A_1 = d_3 - \frac{\gamma b_1 d_2}{1+\rho_1 d_2 + \mu_1 d_2^2},\quad A_2 = d_4 - \frac{\eta b_2 d_2}{1+\rho_2 d_2 + \mu_2 d_2^2},$$

$$B_1 = d_3 - \frac{\gamma a_1 d_1}{1+\theta_1 d_1 + c_1 d_1^2},\quad B_2 = d_4 - \frac{\eta a_2 d_1}{1+\theta_2 d_1 + c_2 d_1^2}.$$

证明　设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ 是系统 (1) 满足 $X(0^+) > 0$ 的解，于是对于充分大的 $t$，存在一个常数 $M > 0$，使得 $x_i(t) \le M$，$y_i(t) \le M$，不妨设当 $t > 0$ 时，$x_i(t) \le M$，$y_i(t) \le M$，且

$$M > \max\left\{\frac{d_1}{a_1+a_2}, \frac{d_2}{b_1+b_2}\right\}.$$

由系统 (1) 可知

$$\dot{x}_1(t) \le x_1(t)\big(d_1 - x_1(t)\big),$$

考虑比较方程

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_1(t)(d_1 - u_1(t)), & t \ne (n+l-1)T, \\ \Delta u_1(t) = -q_1 u_1(t), & t = (n+l-1)T, \end{cases}$$

于是 $x_1(t) \le u_1(t)$，且 $u_1(t) \to d_1$，当 $t \to \infty$，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，当 $t$ 充分大时 $x_1(t) < d_1 + \varepsilon$，不妨设 $x_1(t) < d_1 + \varepsilon$，$t > 0$；同理 $x_2(t) < d_2 + \varepsilon$，$t > 0$。令

$$m_{i+2} = \frac{p_i(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-d_{i+2}T}}{1-(1-q_{i+2})\mathrm{e}^{-d_{i+2}T}} - \varepsilon > 0,\quad \varepsilon > 0,$$

考虑以下方程

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) \ge -d_{i+2} y_i(t), & t \ne (n+l-1)T, \quad t \ne nT, \\ \Delta y_i(t) = -q_{i+2} y_i(t), & t = (n+l-1)T, \\ \Delta y_i(t) = p_i, & t = nT. \end{cases}$$

由脉冲比较定理可得 $y_i(t) \ge v_i(t) > y_i^*(t) - \varepsilon$，因此当 $t$ 充分大时 $y_i(t) > m_{i+2}$，令

$$\lambda_1 = d_3 - \frac{\gamma a_1 m_1}{1+\theta_1 m_1 + c_1 m_1^2} - \frac{\gamma b_1(d_2+\varepsilon)}{1+\rho_1(d_2+\varepsilon)+\mu_1(d_2+\varepsilon)^2} > 0,$$

$$\lambda_2 = d_4 - \frac{\eta a_2 m_1}{1+\theta_2 m_1 + c_2 m_1^2} - \frac{\eta b_2(d_2+\varepsilon)}{1+\rho_2(d_2+\varepsilon)+\mu_2(d_2+\varepsilon)^2} > 0,$$

$$d_3 - \frac{\gamma b_1 m_2}{1+\rho_1 m_2 + \mu_1 m_2^2} - \frac{\gamma a_1(d_1+\varepsilon)}{1+\theta_1(d_1+\varepsilon)+c_1(d_1+\varepsilon)^2} > 0,$$

$$d_4 - \frac{\eta b_2 m_2}{1+\rho_2 m_2 + \mu_2 m_2^2} - \frac{\eta a_2(d_1+\varepsilon)}{1+\theta_2(d_1+\varepsilon)+c_2^2} > 0,$$

$$d_3 - \frac{\gamma a_1 m_1}{1+\theta_1 m_1 + c_1 m_1^2} - \frac{\gamma b_1 m_2}{1+\rho_1 m_2 + \mu_1 m_2^2} > 0,$$

$$d_4 - \frac{\eta a_2 m_1}{1+\theta_2 m_1 + c_2 m_1^2} - \frac{\eta b_2 m_2}{1+\rho_2 m_2 + \mu_2 m_2^2} > 0.$$

下面证明可以找到 $\overline{m_i} > 0$，使得对于充分大的 $t$，成立 $x_i(t) > \overline{m}_i$，分两步来证明。

**步1** 下面将证明存在 $t_i > 0$，使得 $x_i(t_i) \geq m_i$，否则将有以下三种情况：
(i) 存在 $t_2 > 0$，使得 $x_2(t_2) \geq m_2$，而 $x_1(t) < m_1$，$t > 0$；
(ii) 存在 $t_1 > 0$，使得 $x_1(t_1) \geq m_1$，而 $x_2(t) < m_2$，$t > 0$；
(iii) $x_i(t) < m_i$，$t > 0$。
首先对情况 (i) 进行证明，选取充分小的 $\varepsilon_1 > 0$，使得

$$\begin{aligned}\sigma_1 \;=\; &(1-q_1)\exp\Big(\big(d_1 - m_1 - \alpha(d_2+\varepsilon) - a_1\varepsilon_1 - a_2\varepsilon_1\big)T \\ &-\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i a_i(1-q_{i+2}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i lT}-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i T})}{\lambda_i(1-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i T})}\Big) > 1,\end{aligned}$$

由系统 (1) 的第三、四个方程及 $x_1(t) < m_1$，$x_2(t) < d_2 + \varepsilon$，$t > 0$，可得

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) \leq -\lambda_i y_i(t), & t \neq (n+l-1)T, \quad t \neq nT, \\ \Delta y_i(t) = -q_{i+2} y_i(t), & t = (n+l-1)T, \\ \Delta y_i(t) = p_i, & t = nT. \end{cases}$$

由脉冲比较定理得 $y_i(t) \leq v_i(t)$，$v_i(t) \to v_i^*(t)$，当 $t \to \infty$，其中 $v_i(t)$ 是方程

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = -\lambda_i v_i(t), & t \neq (n+l-1)T, \quad t \neq nT, \\ \Delta v_i(t) = -q_{i+2} v_i(t), & t = (n+l-1)T, \\ \Delta v_i(t) = p_i, & t = nT \end{cases} \tag{4}$$

的解，且

$$v_i^*(t) = \begin{cases} \frac{p_i\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i(t-(n-1)T)}}{1-(1-q_{i+2})\mathrm{e}^{-\lambda_i T}}, & (n-1)T < t \leq (n+l-1)T, \\ \frac{p_i(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i(t-(n-1)T)}}{1-(1-q_{i+2})\mathrm{e}^{-\lambda_i T}}, & (n+l-1)T < t \leq nT. \end{cases}$$

因此，存在 $T_i > 0$，当 $t > T_i$ 时，$y_i(t) \leq v_i(t) < v_i^*(t) + \varepsilon_1$，于是

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \geq x_1(t)(d_1 - m_1 - \alpha(d_2+\varepsilon) - a_1(v_1^*(t)+\varepsilon_1) - a_2(v_2^*(t)+\varepsilon_1)), & t \neq (n+l-1)T, \\ \Delta x_1(t) = -q_1 x_1(t), \quad t = (n+l-1)T. \end{cases} \tag{5}$$

令 $N_1 \in Z_+$，且 $(N_1+l-1)T > T_1$，当 $n \geq N_1$，$(N_1+l-1)T \geq \max\{T_1, T_2\}$ 时，对 (5) 式在 $((n+l-1)T, (n+l)T]$ 上积分可得

$$\begin{aligned} &x_1\big((n+l)T\big) \\ \geq\; &x_1\big((n+l-1)T^+\big)\cdot\exp\Big(\int_{(n+l-1)T}^{(n+l)T}(d_1 - m_1 - \alpha(d_2+\varepsilon) - a_1(v_1^*(t)+\varepsilon_1) - a_2(v_2^*(t)+\varepsilon_1))\mathrm{d}t\Big) \\ =\; &x_1\big((n+l-1)T\big)\sigma_1, \end{aligned}$$

于是

$$x_1\big((N_1+k+l)T\big) \geq x_1\big((N_1+l)T\big)\sigma_1^k \to \infty,$$

当 $k \to \infty$，$k \in Z_+$，这与 $x_1(t)$ 的有界性矛盾。同理可以对情况 (ii) 进行证明，下面证明情况 (iii)。

**步 2**　若对于 $t \ge t_1$，均有 $x_1(t) \ge m_1$，则取 $\overline{m_1} = m_1$，结论成立。否则，令

$$t^* = \inf_{t \ge t_1} \{x_1(t) < m_1\}.$$

1)　若 $t^*$ 是脉冲点，即存在 $n_1 \in Z_+$，使得 $t^* = (n_1 + l - 1)T$，则 $x_1(t) > m_1$, $t \in [t_1, t^*)$，且由 $x_1(t)$ 的连续性可得 $x_1(t^*) = m_1$。选取 $n_2, n_3 \in Z_+$，使得

$$(n_2 - 1)T > \max\left\{\frac{\ln(\varepsilon_1/(M + p_1))}{-d_3 + \gamma a_1 m_1 + \gamma b_1 M}, \frac{\ln(\varepsilon_1/(M + p_2))}{-d_4 + \eta a_2 m_1 + \eta b_2 M}\right\},$$

$$(1 - q_1)^{n_2} \sigma_1^{n_3} \mathrm{e}^{n_2 \delta T} > (1 - q_1)^{n_2} \sigma_1^{n_3} \mathrm{e}^{(n_2+1)\delta T} > 1,$$

其中

$$\delta = d_1 - m_1 - \alpha(d_2 + \varepsilon) - a_1 M - a_2 M < 0.$$

令 $\widetilde{T} = (n_2 + n_3)T$，则存在 $t_3 \in (t^*, t^* + \widetilde{T}]$，使得 $x_1(t_3) \ge m_1$，否则考虑 (4) 式满足初始条件 $v_i(n_1 T^+) = y_i(n_1 T^+)$ 的解，当

$$t \in ((n-1)T, nT], \quad n \in [n_1 + 1, n_1 + n_2 + n_3 + 1]$$

时，有

$$v_i(t) = \begin{cases} (1 - q_{i+2})^{n-(n_1+l)}\left(v_i(n_1T^+) - \frac{p_i}{1-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i T}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i(t - n_1 T)} + v_i^*(t), \\ \qquad (n-1)T < t \le (n + l - 1)T, \\ (1 - q_{i+2})^{n-(n_1+l-1)}\left(v_i(n_1T^+) - \frac{p_i}{1-(1-q_{i+2})\cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i T}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i(t - n_1 T)} + v_i^*(t), \\ \qquad (n + l - 1)T < t \le nT. \end{cases}$$

于是

$$|v_i(t) - v_i^*(t)| \le (M + p_i) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_i(t - n_1 T)} < \varepsilon_1,$$

从而当 $t \in [(n_1 + n_2 - 1)T, t^* + \widetilde{T}]$ 时，(5) 式成立，同步骤 1 可得

$$x_1\big(t^* + (n_2 + n_3)T\big) \ge x_1(t^* + n_2 T) \cdot \sigma_1^{n_3},$$

由系统 (1) 得

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \ge x_1(t)(d_1 - m_1 - \alpha(d_2 + \varepsilon) - a_1 M - a_2 M) = \delta \cdot x_1(t), \quad t \ne (n + l - 1)T, \\ \Delta x_1(t) = -q_1 x_1(t), \quad t = (n + l - 1)T. \end{cases} \tag{6}$$

对 (6) 式在 $[t^*, t^* + n_2 T]$ 上积分可得

$$x_1(t^* + n_2 T) \ge m_1 (1 - q_1)^{n_2} \cdot \mathrm{e}^{n_2 \delta T} > m_1,$$

矛盾。令

$$\tilde{t} = \inf_{t > t^*} \{x_1(t) \ge m_1\},$$

则对于 $t \in (t^*, \tilde{t}]$，有 $x_1(t) < m_1$，且 $x_1(\tilde{t}) = m_1$，当 $t \in (t^*, \tilde{t}]$ 时，有

$$x_1(t) \ge x_1(t^*)(1 - q_1)^{n_2+n_3} \cdot \mathrm{e}^{\delta(t - t^*)} \ge m_1 (1 - q_1)^{n_2+n_3} \cdot \mathrm{e}^{\delta(n_2+n_3+1)T} = \overline{m_1}.$$

由 $x_1(\tilde{t}) \geq m_1$ 知，对于 $t > \tilde{t}$，上述过程可以重复。所以 $x_1(t) \geq \overline{m_1}$, $t > t_1$。

2) 若 $t^*$ 不是脉冲点，则当 $t \in [t_1, t^*)$ 时，$x_1(t) \geq m_1$，且 $x_1(t^*) = m_1$。令 $t^* \in [(\widetilde{n_1} + l - 1)T, (\widetilde{n_1} + l)T]$, $\widetilde{n_1} \in Z_+$，当 $t \in (t^*, (\widetilde{n_1} + l)T]$ 时，$x_1(t)$ 有以下两种情况：

a) 当 $t \in (t^*, (\widetilde{n_1} + l)T]$ 时，$x_1(t) \leq m_1$，类似于步 2 中 1)，可以证明存在 $t_4 \in [(\widetilde{n_1} + l)T, (\widetilde{n_1} + l)T + \widetilde{T}]$，使得 $x_1(t_4) > m_1$，令

$$\bar{t} = \inf_{t \geq t^*} \{x_1(t) \geq m_1\},$$

则当 $t \in [t^*, \bar{t})$ 时，$x_1(t) < m_1$，且 $x_1(\bar{t}) = m_1$。当 $t \in (t^*, \bar{t})$ 时

$$x_1(t) \geq m_1(1 - q_1)^{n_2 + n_3} \cdot \mathrm{e}^{\delta(n_2 + n_3 + 1)T} = \overline{m_1},$$

由 $x_1(\bar{t}) \geq m_1$ 知，对于 $t > \bar{t}$ 上述过程可以重复。

b) 存在 $t \in (t^*, (\widetilde{n_1} + l)T]$，使得 $x_1(t) \geq m_1$，令

$$\hat{t} = \inf_{t > t^*} \{x_1(t) \geq m_1\},$$

则当 $t \in (t^*, \hat{t})$ 时，$x_1(t) < m_1$，且 $x_1(\hat{t}) = m_1$。当 $t \in (t^*, \hat{t})$ 时，(6) 式成立，对 (6) 式在 $(t^*, \hat{t})$ 上积分可得

$$x_1(t) \geq x_1(t^*) \cdot \mathrm{e}^{\delta(t - t^*)} \geq m_1 \mathrm{e}^{\delta(n_2 + n_3)T} > \overline{m_1},$$

由 $x_1(\hat{t}) > m_1$，所以当 $t > \hat{t}$ 时，上述过程可以重复，因此，当 $t \geq t_1$ 时，$x_1(t) \geq \overline{m_1}$。同理可证，当 $t \geq t_2$ 时，$x_2(t) \geq \overline{m_2}$。

**推论 2.1** 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ 是系统 (1) 的任意解，若 $\beta < \frac{d_2}{d_1}$, $B_i > 0$，且 $p_{2\max1} < p_2 < p_{2\min2}$，则 $x_2(t)$, $y_i(t)$ 是持续生存的 $(i = 1, 2)$，且当 $t \to \infty$, $x_1(t) \to 0$。

**推论 2.2** 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ 是系统 (1) 的任意解，若 $\alpha < \frac{d_1}{d_2}$, $A_i > 0$，且 $p_{2\max2} < p_2 < p_{2\min1}$，则 $x_1(t)$, $y_i(t)$ 是持续生存的 $(i = 1, 2)$，且当 $t \to \infty$, $x_2(t) \to 0$。

## 3 数值模拟与分析讨论

对于系统 (1) 的前三个方程所构成的连续系统，我们不能求出显式解，且系统 (1) 不能化为与之等价的差分系统，从分析的角度难以处理，所以使用数值模拟的方法来描述。考虑种群密度的非负性和天敌投放量对系统 (1) 动力学性质的影响，在第一象限内作出系统 (1) 的分支图、相图及时间序列图。

取参数 $d_1 = 1.4$, $d_2 = 0.9$, $d_3 = 0.6$, $d_4 = 0.75$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.12$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.5$, $b_1 = 0.4$, $b_2 = 0.25$, $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.4$, $\theta_1 = 0.2$, $\theta_2 = 0.2$, $\rho_1 = 0.15$, $\rho_2 = 0.3$, $\gamma = 0.3$, $\eta = 0.5$, $q_1 = 0.02$, $q_2 = 0.02$, $q_3 = 0.06$, $q_4 = 0.01$, $p_1 = 0.2$, $l = 0.01$, $T = 4$ 和初值 $(1, 1, 1, 1)$，则

$$p_{2\max1} = 13.68452135, \quad p_{2\max2} = 10.32658412, \quad p_{2\min1} = 10.770778565,$$

$$p_{2\min2} = 7.320205157, \quad p_{2\max} = 13.74042805, \quad p_{2\min} = 7.320205157.$$

取 $p_2 = 13.8$，其相图与时间序列图如图 1，其中，图 1(a), (aa) 从相图上说明了灭绝周期解的全局渐近稳定性，支持了定理 2.1 的结论。取 $p_2 = 10.5$，可看出，$x_2(t) \to 0$，当 $t \to \infty$，其相图与时间序列图如图 2，其中，图 2(a), (aa) 从相图上说明了 $x_1(t)$, $y_i(t)$ 是持续生存的且 $x_2(t)$ 灭绝。与推理 2.2 吻合。

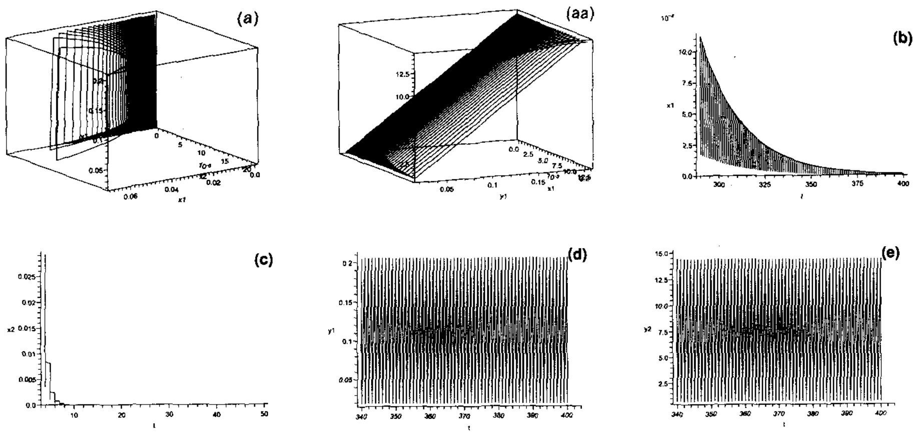


图 1:　系统 (1) 的相图与时间序列图，系统 (1) 的食饵灭绝周期解 $(0,0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的，(a) 相图 $(x_1(t),x_2(t),y_1(t))$；(aa) 相图 $(x_1(t),y_1(t),y_2(t))$；(b) 关于 $x_1(t)$ 的时间序列图；(c) 关于 $x_2(t)$ 的时间序列图；(d) 关于 $y_1(t)$ 的时间序列图；(e) 关于 $y_2(t)$ 的时间序列图

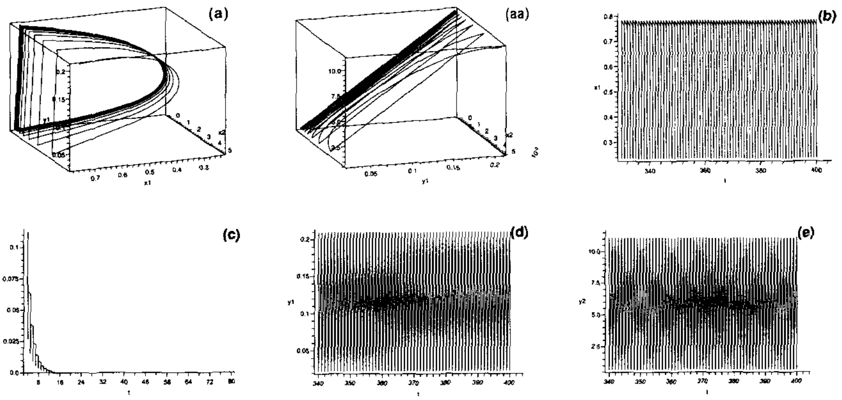


图 2:　系统 (1) 的相图与时间序列图，$x_1(t)$, $y_i(t)$ 是持续生存的且 $x_2(t) \to 0$，当 $t \to \infty$，(a) 相图 $(x_1(t),x_2(t),y_1(t))$；(aa) 相图 $(x_2(t),y_1(t),y_2(t))$；(b) 关于 $x_1(t)$ 的时间序列图；(c) 关于 $x_2(t)$ 的时间序列图；(d) 关于 $y_1(t)$ 的时间序列图；(e) 关于 $y_2(t)$ 的时间序列图

取参数 $d_1=5$, $d_2=4.2$, $d_3=0.6$, $d_4=0.9$, $\alpha=0.4$, $\beta=0.28$, $a_1=0.71$, $a_2=0.51$, $c_1=0.2$, $c_2=0.3$, $b_1=0.41$, $b_2=0.61$, $\mu_1=0.3$, $\mu_2=0.4$, $\theta_1=0.11$, $\theta_2=0.12$, $\rho_1=0.11$, $\rho_2=0.12$, $\gamma=0.95$, $\eta=0.98$, $q_1=0.2$, $q_2=0.18$, $q_3=0.01$, $q_4=0.02$, $p_1=0.08$, $l=0.1$, $T=10$ 和初值 $(1,1,1,1)$，系统 (1) 的分支图如图 3。当 $0<p_2<0.4$ 时，系统出现拟周期现象，如图 4(a)；当 $0.4<p_2<6.3$，随着投放量 $p_2$ 的增加，系统 (1) 出现典型的倍周期分支到混沌现象，如图 4(b)-(e)；当 $13.6<p_2<18$，随着投放量 $p_2$ 的增加，系统 (1) 出现典型的半周期分支现象，如图 4(f)-(i)。

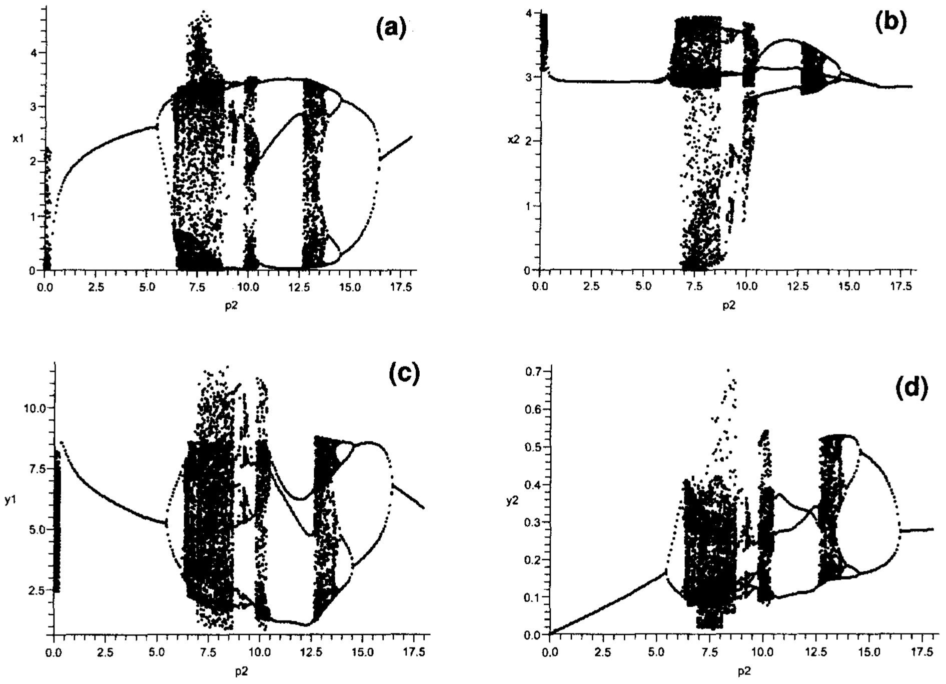


图 3: 系统 (1) 的分支图, $p_2 \in [0.01, 18.01]$; (a) 关于 $x_1(t)$; (b) 关于 $x_2(t)$; (c) 关于 $y_1(t)$; (d) 关于 $y_2(t)$

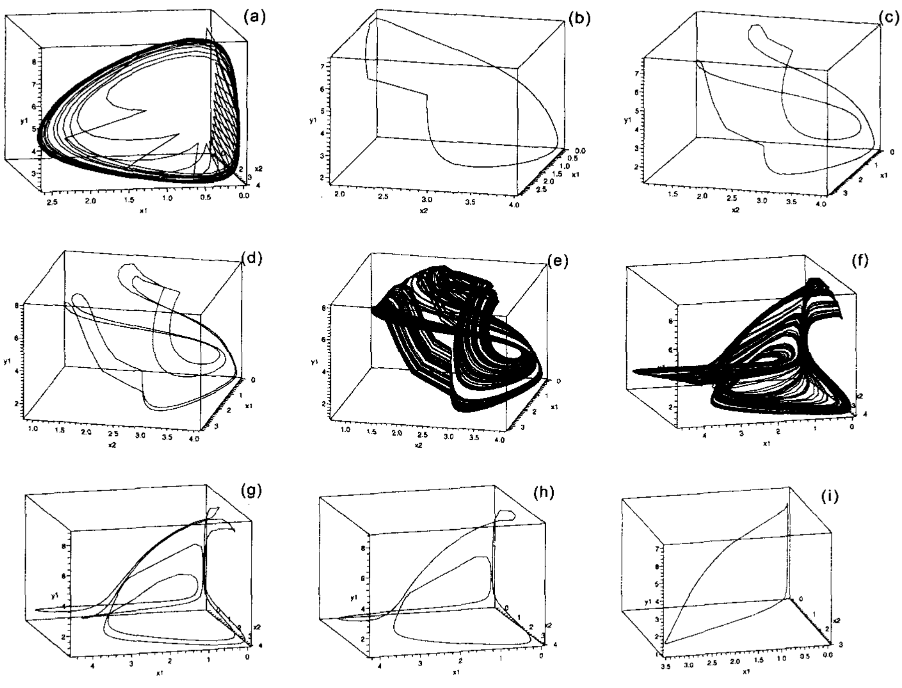


图 4: 系统 (1) 的相图, (a) $p_2 = 0.1$, 出现拟周期现象; (b) $p_2 = 4$, 出现 $T$ 周期解; (c) $p_2 = 6.1$, 出现 $2T$ 周期解; (d) $p_2 = 6.25$, 出现 $4T$ 周期解; (e) $p_2 = 6.35$, 出现混沌现象; (f) $p_2 = 13.1$, 出现混沌现象; (g) $p_2 = 14$, 出现 $4T$ 周期解; (h) $p_2 = 15$, 出现 $2T$ 周期解; (i) $p_2 = 17$, 出现 $T$ 周期解

由分支图3可知，当取 $p_2 = 7.5$ 时，系统 (1) 出现典型的混沌现象，其相图与时间序列图如图5。

目前混沌还没有统一的定义，混沌的本质特征是对初始条件的敏感依赖性。记系统 (1) 过初值 $(1,1,1,1)$ 的解为 $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$，过值 $(1.0001, 0.9999, 1.0001, 1.0001)$ 的解为

$$\big(X_1(t), X_2(t), Y_1(t), Y_2(t)\big).$$

比较两状态的差异，令

$$e(t) = \max\big\{|x_1(t) - X_1(t)|, |x_2(t) - X_2(t)|, |y_1(t) - Y_1(t)|, |y_2(t) - Y_2(t)|\big\},$$

考虑当 $p_2 = 7.5$ 时系统 (1) 状态变量对初始时刻的敏感性。由图6可知经过一段时间，两状态变量时而靠的很近，时而相差很大，即状态变量对初始时刻具有敏感依赖性，也就是说当 $p_2 = 7.5$ 时，系统 (1) 具有混沌性质。

数值模拟佐证了本文的结论还显示出系统 (1) 具有复杂的动力学性质，如随着参数的增加，系统出现拟周期分支、倍周期分支、混沌和半周期分支等现象。

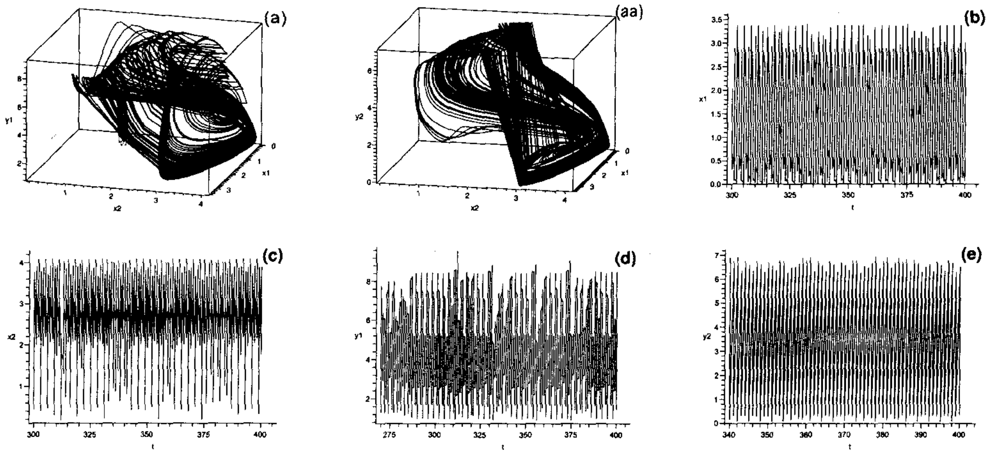


图 5:　系统 (1) 的相图与时间序列图，$p_2 = 7.5$，(a),(aa) 相图；(b) 关于 $x_1(t)$ 的时间序列图；(c) 关于 $x_2(t)$ 的时间序列图；(d) 关于 $y_1(t)$ 的时间序列图；(e) 关于 $y_2(t)$ 的时间序列图

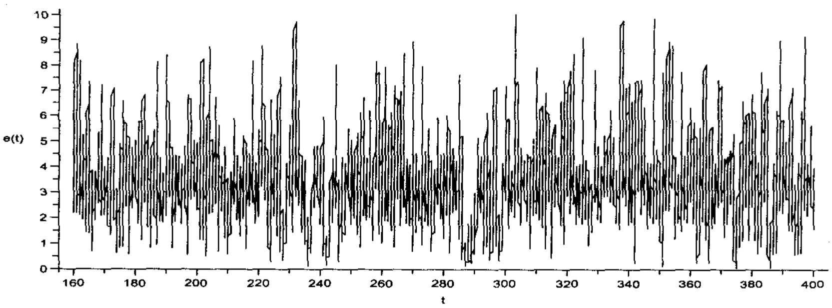


图 6:　取 $p_2 = 7.5$，系统 (1) 解对初值敏感性，$(t, e(t))$

## 参考文献：


[1] Baninov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. New York: Longman Scientific and Technical Press, 1993

[2] 陆征一，周义仓. 数学生物学研究进展[M]. 北京：科学出版社，2005
Lu Z Y, Zhou Y C. The Research Progress of Mathematical Biology[M]. Beijing: Science Press, 2005

[3] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京：科学出版社，1998
Chen L S. Models and Methods of Mathematical Ecology[M]. Beijing: Science Press, 1998

[4] 马知恩. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京：科学出版社，2004
Ma Z E. Modeling and Research on the Dynamics of Infectious Diseases[M]. Beijing: Science Press, 2004

[5] 魏朝颖，王爱丽. 一类具有脉冲的向量型时滞微分系统的振动性[J]. 工程数学学报，2006, 23(5): 856-860
Wei C Y, Wang A L. The oscillations of a class of delay differential system with impulse[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(5): 856-860

[6] 罗李平，杨柳. 具高阶Laplace算子的非线性脉冲中立抛物型方程的振动性[J]. 工程数学学报，2009, 26(4): 663-670
Luo L P, Yang L. Oscillation of nonlinear impulsive neutral parabolic equations with higher order laplace operator[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(4): 663-670

[7] Jin Z, Ma Z E, Han M A. The existence of periodic solutions of the $n$-species Lotka-Volterra competition systems with impulsive[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 181-188

[8] Bach P D. Biological Control of Insect Pests and Weeds[M]. New York: Reinhold, 1964

[9] Van Lentern J C. Integrated Pest Management in Protected Crops[M]. London: Chapman, Hall, 1995

[10] Liu B, Zhang Y J, Chen L S. The dynamical behaviors of a Lotka-Volterra predator-prey model concerning integrated pest management[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2005, 6: 227-243

[11] 刘兵，陈兰荪，张玉娟. 基于IPM策略的捕食与被捕食系统的动力学性质[J]. 工程数学学报，2005, 22(1): 9-14
Liu B, Chen L S, Zhang Y J. The dynamics of a predator-prey system concerning integrated pest management[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(1): 9-14

[12] 张树文，陈兰荪. 具有密度依赖的生育脉冲单种群阶段结构模型[J]. 系统科学与数学学报，2005, 25(3): 264-275
Zhang S W, Chen L S. Stage-Structured model of a single-species with density-dependent birth pulses[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2005, 25(3): 264-275

[13] 冯孝周，吴建华. 一类带Beddington-DeAngelis反应项的捕食模型平衡态的分歧解[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 665-671
Feng X Z, Wu J H. Bifurcation solutions of steady-state of the prey-predator model with Beddington-DeAngelis response[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 665-671

[14] 韩丽涛. 一类食饵中存在疾病的捕食系统的SIS传染病模型[J]. 工程数学学报，2007, 24(1): 71-78
Han L T. A predator-prey SIS epidemic model with infected prey[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(1): 71-78

[15] 郭改慧，李艳玲. 带B-D反应项的捕食-食饵模型正解的一致持续性[J]. 工程数学学报，2009, 26(5): 946-950
Guo G H, Li Y L. The persistence of positive solutions for a predator-prey model with B-D functional response[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(5): 946-950

[16] Andrews J F. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates[J]. Biotechnol Bioeng, 1968, 10: 707-723

[17] Liu Z J, Tan R H. Impulsive harvesting and stocking in a Monod-Haldane functional response predator-prey system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 34: 454-464

[18] 李艳玲，马逸尘. 四种群食物链方程的整体渐近稳定性[J]. 工程数学学报，2006, 23(3): 407-413
Li Y L, Ma Y C. Global asymptotic stability of four-species food-chain systems[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(3): 407-413

[19] Wang F Y, Hao C P, Chen L S. Bifurcation and chaos in a Monod-Haldane type food chain chemostat with pulsed input and washout[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32: 181-194

[20] Xiang Z Y, Song X Y. Extinction and permanence of a two-prey two-predator system with impulsive on the predator[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 29: 1121-1136

[21] Xiang Z Y, Song X Y, Zhang F Q. Bifurcation and complex dynamics of a two-prey two-predator system concering periodic biological and chemical control[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 37: 424-437

[22] 吴兴杰，黄文韬，马忠军. 具功能反应的脉冲食饵两捕食者系统的分支与混沌[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版)，2009, 32(2): 256-261

Wu X J, Huang W T, Ma Z J. Bifurcation and chaos of a one-prey two-predator impulsive system with functional response[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2009, 32(2): 256-261

# Dynamic Analysis of a Four-Species Prey-predator Impulsive System with a Monod-Haldane Functional

HUANG Wen-tao[1], WU Xing-jie[2], LI Wei[2]

(1- School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004; 2- Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei 230061)

**Abstract:** Basing on the strategy of integrated biology management and using the impulsive comparison theorem, the Floquent theory and the small amplitude perturbation skill, we investigate the dynamical properties of a four-species prey-predator impulsive system with a Monod-Haldane functional response, impulsive ratio harvest and impulsive release. Sufficient conditions for the system of the two preys to be extinct and permanence are proved. Moreover, the two sufficient conditions of which the extinction for one of the four preys and the permanence of remaining species are given. Numerical simulation shows that, with the increasing of immigration, the system has more complex dynamics including the quasi-periodic bifurcation, periodic doubling bifurcation, chaos, periodic halving bifurcation, etc.

**Keywords:** *prey-predator; impulsive comparison theorem; bifurcation; chaos; Floquent theory*

**Received:** 24 Nov 2008. **Accepted:** 09 Mar 2010.
**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (10961011); the Natural Science Research Program of Anhui Higher Education Institutions ((KJ2010B164)).